

Temat: Wokół twierdzenia Pitagorasa.

Opracowanie:

Danuta Komorowska

Warszawa, maj 2004 r.

Wokół twierdzenia Pitagorasa

Słynne twierdzenie o związku między bokami trójkąta prostokątnego przyjęło nazwę od nazwiska *Pythagorasa z Samos*, greckiego matematyka, astronoma i filozofa, żyjącego w latach 580 – 496 p.n.e.

Pitagoras, który był twórcą kierunku filozoficznego zwanego pitagoreizmem, nie pozostawił żadnych prac i o jego działalności wiadomo niewiele. Trudno jest wyodrębnić odkrycia samego Pitagorasa spośród tych, których dokonali jego uczniowie i następcy, nazywający siebie pitagorejczykami.

Tradycja przypisuje Pitagorasowi zapoczątkowanie zarówno idei filozoficznych, jak i naukowych, podjętych następnie przez pitagorejczyków.

Założony przez Pitagorasa ok. 530 r. P.n.e. w Krotonie, kolonii greckiej w południowej Italii, religijno – polityczny związek miał w swym dorobku znaczne osiągnięcia naukowe. Związek ten zyskał później nazwę szkoły pitagorejskiej i przetrwał do połowy IV w. p.n.e.

Wiadomo, że Pitagoras wiele podróżował. W Fenicji i Babilonie miał okazję poznać dokonania tamtejszych matematyków i przenieść myśl matematyczną Egipcjan i Babilończyków do Grecji.

Jak świadczą zachowane tabliczki z pismem klinowym, twierdzenie zwane twierdzeniem Pitagorasa znane było Babilończykom na długo przed Pitagorasem. Nie był on więc odkrywcą tego twierdzenia, ale prawdopodobnie je udowodnił.

Babilończycy znali również złoty podział odcinka. Pentagram – znak pitagorejczyków – występuje na tabliczkach babilońskich. Wiadomości o średniej arytmetycznej, geometrycznej i harmoniczej, zastosowane przez Pitagorasa w muzyce, zostały przez niego przejęte od matematyków babilońskich.

Pitagorejczycy stworzyli jednak szczególne metody badania naukowego. Matematykę łączyli ściśle z filozofią, ich wiedza była usystematyzowana, a nowe pojęcia wprowadzali na zasadzie logicznego rozumowania, tworząc elementy podstaw matematyki.

Szczególne znaczenie przypisywali liczbom. Ich mottem było: „Wszystko jest liczbą”. Od pitagorejczyków pochodzi podział na liczby parzyste i nieparzyste. Liczby przedstawiali w formie figur geometrycznych, układając je z kamyków na piasku, co pozwoliło im znaleźć sumy prostych szeregów arytmetycznych (liczby trójkątne i kwadratowe jako sumy szeregów $1 + 2 + \dots + n$; $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$).

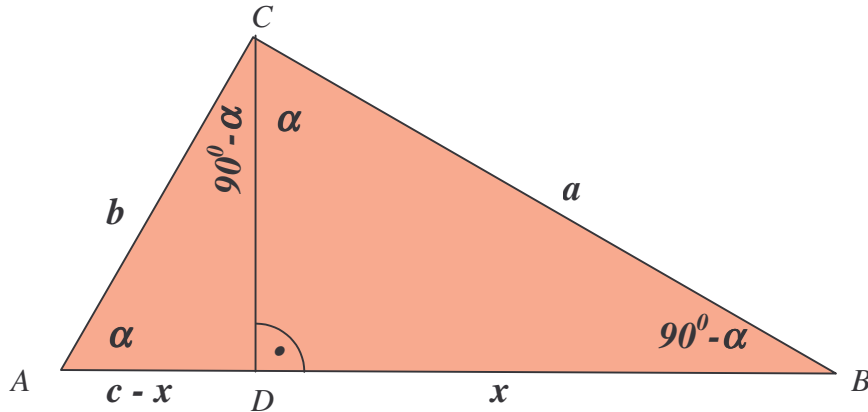
Pitagorejczycy odkryli wiele własności liczb i można ich uznać za twórców początków teorii liczb. Wiedzieli o istnieniu liczb niewymiernych, ale zobowiązani byli do zachowania tego w tajemnicy. Istnienie liczb niewymiernych było niezgodne z ich filozofią, niezgodne z harmonią świata, w którym liczby naturalne odgrywały wg nich szczególną rolę.

Twierdzenie Pitagorasa.

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

Założenie: $\Delta ABC : \sphericalangle C = 90^\circ$

Teza: $a^2 + b^2 = c^2$



Dowód (z podobieństwa trójkątów):

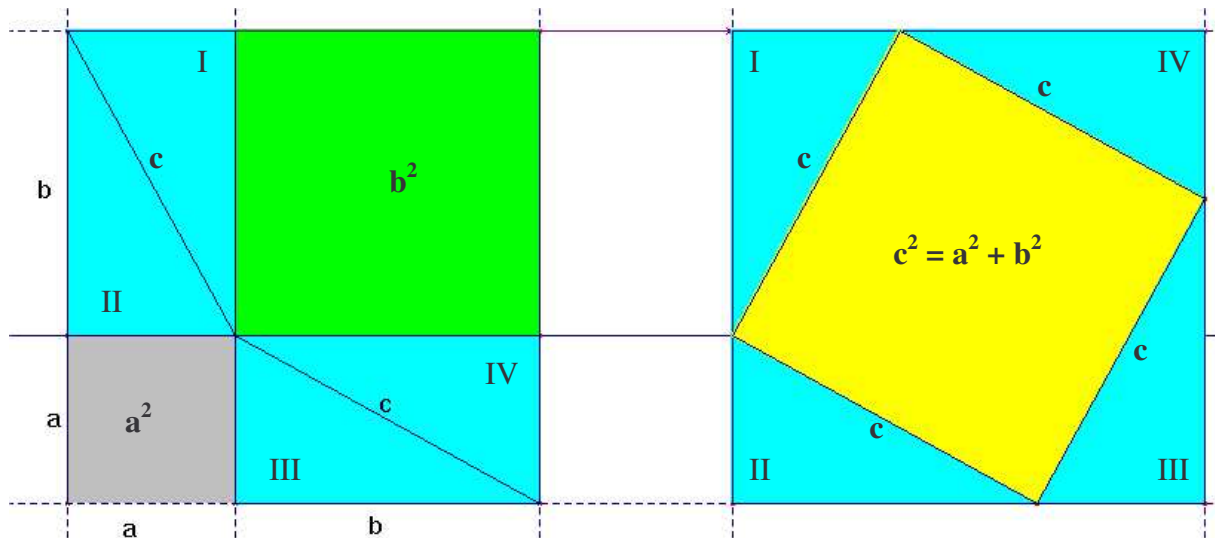
$\Delta ABC \overset{kk}{\sim} \Delta BCD \overset{kk}{\sim} \Delta ACD$

zatem: $\frac{c-x}{a} = \frac{a}{c}$ i $\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$

więc: $c^2 - cx = a^2$ i $cx = b^2$

stąd: $c^2 = a^2 + b^2$ c.k.d.

Dowód geometryczny twierdzenia Pitagorasa.



Trójki pitagorejskie

Definicja.

Trójki pitagorejskie to trójki liczb naturalnych, spełniających twierdzenie Pitagorasa.

Twierdzenie.

Dla każdej pary liczb naturalnych n i m , takich, że $\text{NWD}(n, m) = 1$, $n > m$, i jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta, trójkę pitagorejską stanowią:

$$n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2.$$

Np.: $n = 3$, $m = 2$ spełniają założenia, wobec czego:

$$n^2 - m^2 = 3^2 - 2^2 = \mathbf{5}, 2nm = 2 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{12}, n^2 + m^2 = 3^2 + 2^2 = \mathbf{13}$$

Np.: $n = 4$, $m = 1$ spełniają założenia, wobec czego:

$$n^2 - m^2 = 4^2 - 1^2 = \mathbf{15}, 2nm = 2 \cdot 4 \cdot 1 = \mathbf{8}, n^2 + m^2 = 4^2 + 1^2 = \mathbf{17}$$

Np.: $n = 5$, $m = 4$ spełniają założenia, wobec czego:

$$n^2 - m^2 = 5^2 - 4^2 = \mathbf{9}, 2nm = 2 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{40}, n^2 + m^2 = 5^2 + 4^2 = \mathbf{41}$$

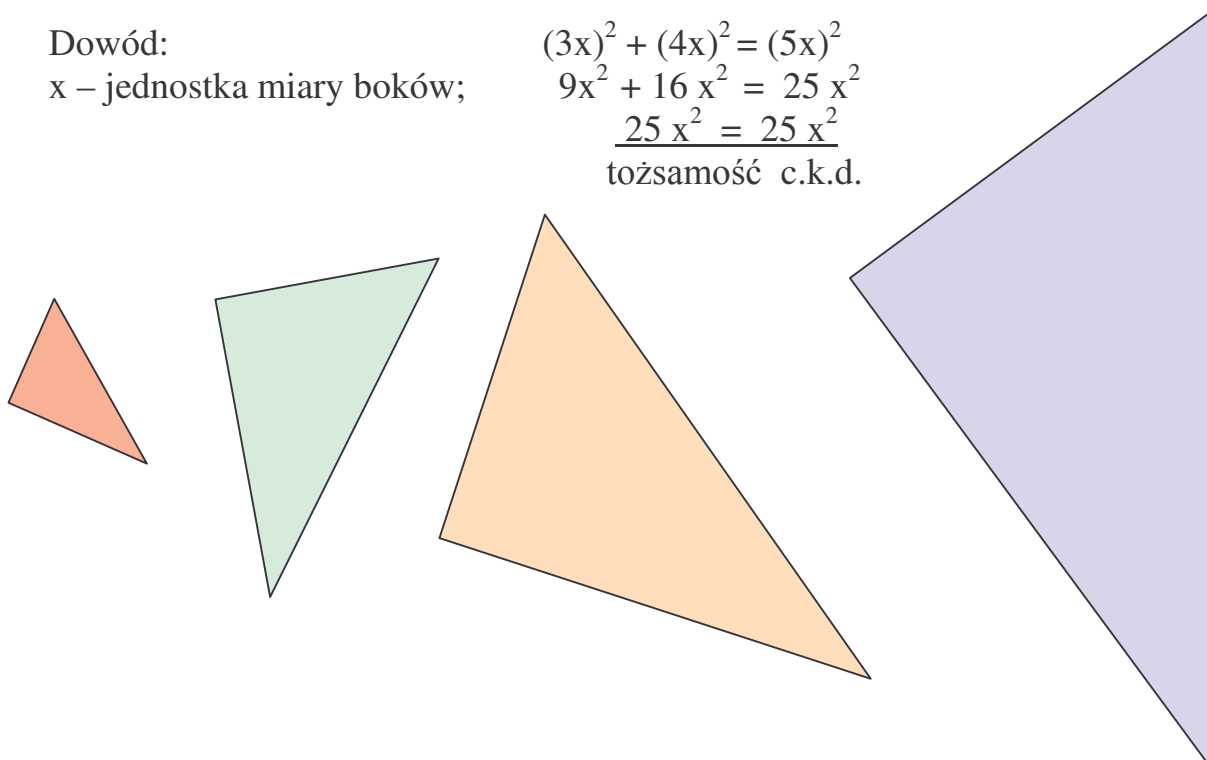
Definicja. Trójkąt egipski to trójkąt, którego boki pozostają w stosunku 3 : 4 : 5.

Twierdzenie. Trójkąt egipski jest trójkątem prostokątnym.

Dowód:

x – jednostka miary boków;

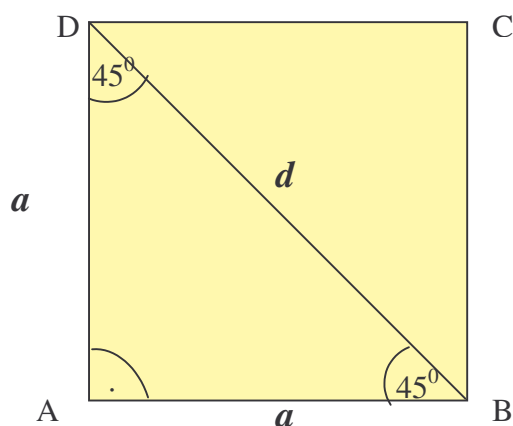
$$\begin{aligned} (3x)^2 + (4x)^2 &= (5x)^2 \\ 9x^2 + 16x^2 &= 25x^2 \\ \underline{25x^2} &= 25x^2 \\ &\text{tożsamość c.k.d.} \end{aligned}$$



Trójki pitagorejskie

będaće trójkaćami egipskimi			nie będaće trójkaćami egipskimi c.d.		
a	b	c	a	b	c
3	4	5	7	24	25
6	8	10	14	48	50
9	12	15	21	72	75
12	16	20	28	96	100
15	20	25	i.t.d.		
18	24	30	8	15	17
21	28	35	16	30	34
24	32	40	24	45	51
27	36	45	32	60	68
30	40	50	40	75	85
33	44	55	48	90	102
36	48	60	i.t.d.		
39	52	65	9	40	41
42	56	70	18	80	82
45	60	75	27	120	123
48	64	80	i.t.d.		
51	68	85	12	35	37
54	72	90	24	70	74
57	76	95	36	105	111
60	80	100	i.t.d.		
i.t.d.			11	60	61
nie będaće trójkaćami egipskimi			13	84	85
a	b	c	16	63	65
5	12	13	20	21	29
10	24	26	28	45	53
15	36	39	33	56	65
20	48	52	36	77	85
25	60	65	39	80	81
30	72	78	40	42	58
35	84	91	48	55	73
40	96	104	60	63	87
45	108	117	65	72	97
i.t.d.			i.t.d.		

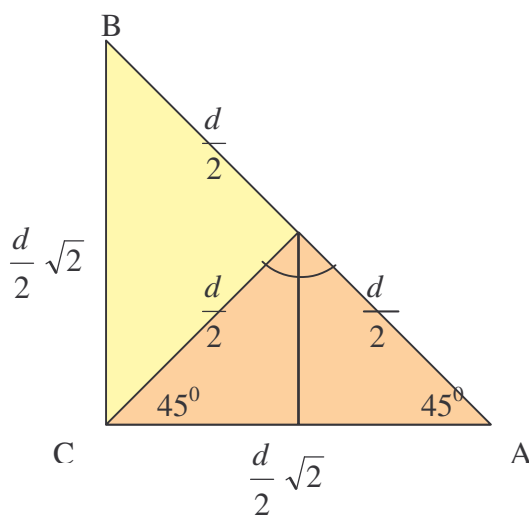
Wyprowadzenie wzoru na przekątną kwadratu.



$\Delta ABC : \sphericalangle C = 90^\circ \Rightarrow a^2 + a^2 = d^2$ (na podstawie tw. Pitagorasa)
zatem $d = a \sqrt{2}$, gdzie a – bok kwadratu; d – przekątna kwadratu.

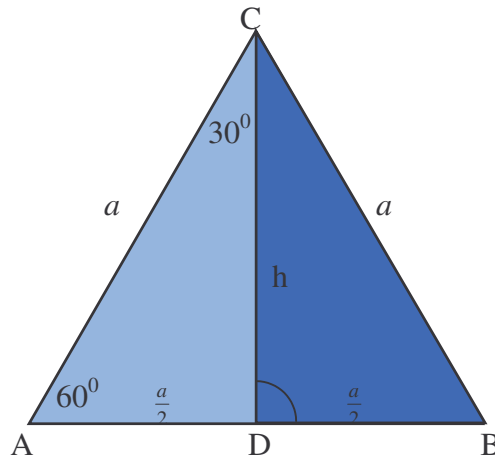
Twierdzenia o trójkącie o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

1. W trójkącie prostokątnym równoramiennym, w którym przyprostokątna ma długość a , przeciwprostokątna ma długość $a\sqrt{2}$.
2. W trójkącie prostokątnym równoramiennym, w którym przeciwprostokątna ma długość d , przyprostokątna ma długość $\frac{d}{2}\sqrt{2}$.



Dowód obu twierdzeń wynika bezpośrednio z twierdzenia Pitagorasa.

Wyprowadzenie wzoru na wysokość i pole trójkąta równobocznego.



$\Delta ACD : \angle D = 90^0 \Rightarrow a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$ (na podstawie tw. Pitagorasa)

zatem: $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$, gdzie a – bok trójkąta równobocznego;

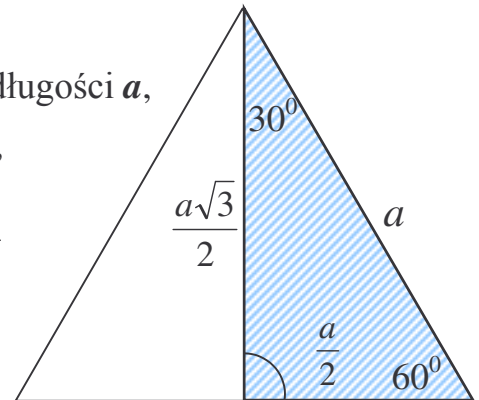
h – wysokość trójkąta równobocznego.

Ponieważ: $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$,

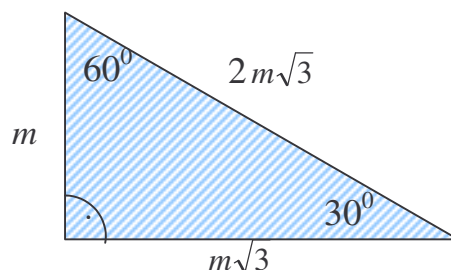
więc: $P_{\Delta \text{ równobocznego}} = \frac{1}{2}ah = P_{\Delta} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Twierdzenia o trójkącie o kątach 30^0 , 60^0 , 90^0 .

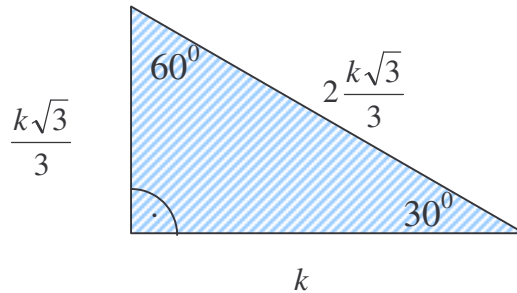
1. W trójkącie o kątach 30^0 , 60^0 , 90^0 ,
w którym naprzeciwko kąta prostego leży bok o długości a ,
naprzeciwko kąta 30^0 leży bok o długości $\frac{a}{2}$,
a naprzeciwko kąta 60^0 leży bok o długości $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



2. W trójkącie o kątach 30^0 , 60^0 , 90^0 , w którym naprzeciwko kąta 30^0 leży bok o długości m , naprzeciwko kąta prostego leży bok o długości $2m$, a naprzeciwko kąta 60^0 leży bok o długości $m\sqrt{3}$.

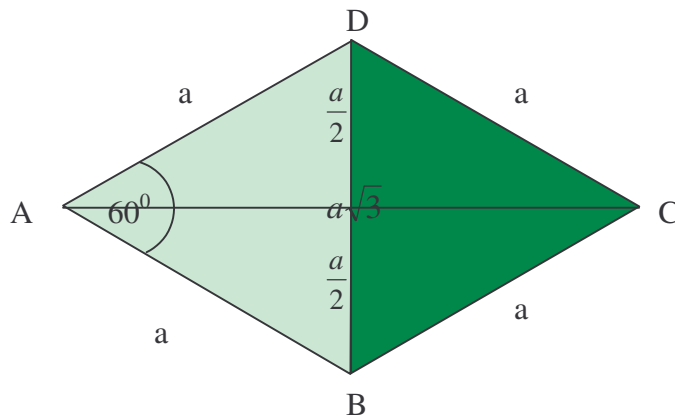


3. W trójkącie o kątach 30° , 60° , 90° , w którym naprzeciwko kąta 60° leży bok o długości k , naprzeciwko kąta 30° leży bok o długości $\frac{k\sqrt{3}}{3}$, a naprzeciwko kąta prostego leży bok o długości $2\frac{k\sqrt{3}}{3}$.



Dowód wszystkich trzech twierdzeń wynika bezpośrednio z twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie o rombie o kącie ostrym 60° .

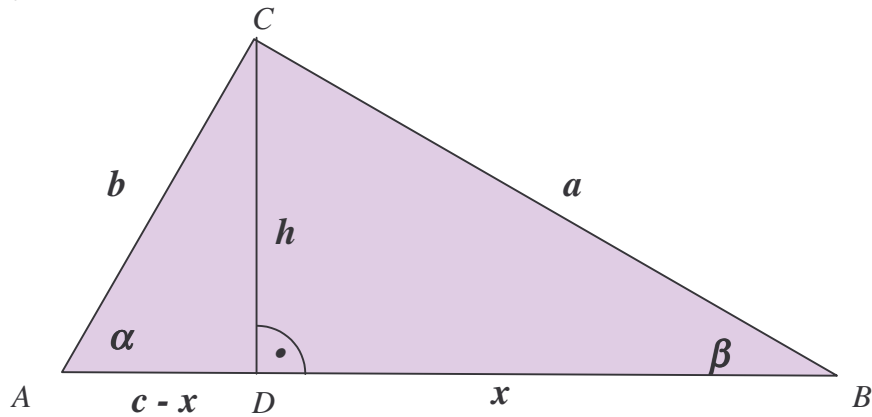


W rombie o kącie ostrym 60° i boku a , krótsza przekątna ma długość a , natomiast dłuższa jest równa $a\sqrt{3}$.

Dowód: Łatwo zauważyć, że krótsza przekątna dzieli romb o kącie ostrym 60° na dwa trójkąty równoboczne o boku a , a dłuższa jest równa dwóm wysokościami trójkąta równobocznego.

Twierdzenie Cosinusów.
(uogólnione tw. Pitagorasa)

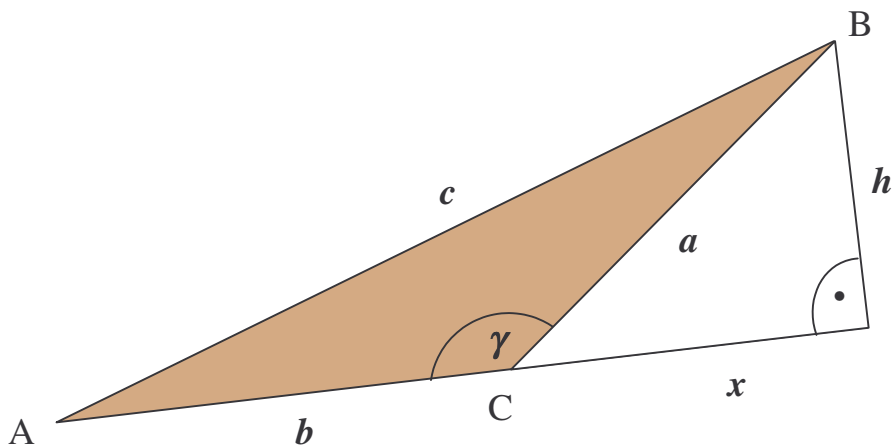
Kwadrat długości boku trójkąta jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między nimi.



$$h^2 = b^2 - (c - x)^2 = a^2 - x^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cx + x^2 - x^2 ; x = a \cos \beta$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca \cos \beta$$



$$h^2 = c^2 - (b + x)^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bx$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \frac{x}{a}$$

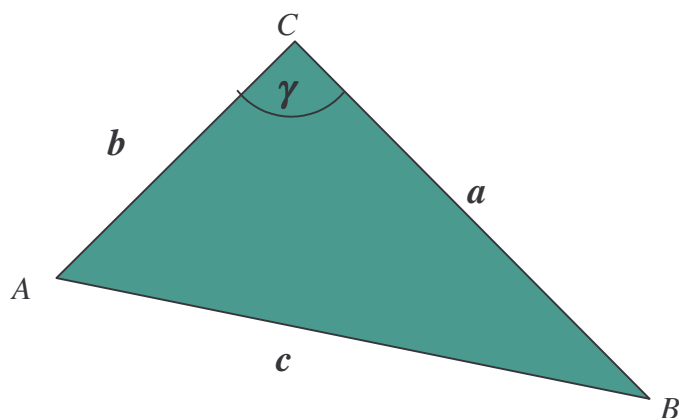
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos (180^\circ - \gamma)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\text{Jeśli } \gamma = 90^\circ, \text{ to } c^2 = a^2 + b^2$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Jeśli suma kwadratów długości dwóch boków jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt jest prostokątny.



Założenie: $c^2 = a^2 + b^2$

Teza: $\gamma = 90^0$

Dowód: Z tw. cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$,

zatem: $c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ab \cos \gamma = 0 \Leftrightarrow \cos \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 90^0$ c.k.d.

Materiały źródłowe:

1. Praca zbiorowa, Encyklopedia szkolna *MATEMATYKA*, WSiP, 1992 praca zbiorowa,
2. Dr Damian Brückner, Wykład z Elementów geometrii, Studia Podyplomowe *MATEMATYKA W SZKOLE*, Warszawa, 2003
3. Witold Więśław, Liczby i geometria, WSiP, praca zbiorowa, 1996